AGRO 81

MATIÈRES A OPTION

(Option générale)

Mathématiques, Sciences physiques, Biologie

DURÉE : 3 heures

MATHÉMATIQUES

On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y'' + y\,\varphi(t) = 0$$

où φ est une fonction réelle donnée et y une fonction réelle inconnue, deux fois continûment dérivable, de la variable réelle t.

I

Dans un espace affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on pose : $\overrightarrow{OM} = u(t)\,\vec{i} + v(t)\,\vec{j} + w(t)\,\vec{k}$, où u, v, w sont solutions de (E), puis : $\vec{\Omega} = \overrightarrow{OM} \wedge \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$.

1° Calculer $\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}$ et montrer que le vecteur $\vec{\Omega}$ est indépendant de t.

2° En déduire que les points M sont situés dans un même plan et que, si u et v sont deux solutions de (E) dont le rapport n'est pas constant, à toute solution y de (E) on peut associer deux réels A et B tels que : $y(t) = A\,u(t) + B\,v(t)$.

Tournez la page S. V. P.

II

On suppose désormais que la fonction φ admet 2π pour période.

1° u et v désignant des solutions de (E) dont le rapport n'est pas constant, montrer qu'il existe des réels α, β, γ, δ tels que :

$$u(t + 2\pi) = \alpha u(t) + \beta v(t),$$
$$v(t + 2\pi) = \gamma u(t) + \delta v(t),$$

et que ces réels vérifient la relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

On pourra utiliser le point M défini par $\overrightarrow{OM} = u(t)\,\vec{i} + v(t)\,\vec{j}$ puis comparer $\vec{\Omega}(t + 2\pi)$ et $\vec{\Omega}(t)$.

2° On suppose connue une solution particulière u de (E) qui ne s'annule pas. On pose : $y(t) = u(t)\,z(t)$.

Écrire l'équation différentielle (E_1) vérifiée par la nouvelle fonction inconnue z et montrer qu'à toute solution de (E_1) on peut associer un réel k tel que $z' = \dfrac{k}{u^2}$.

3° Si u est une fonction admettant 2π pour période et ne s'annulant pas, montrer que la fonction définie par :

$$F(t) = \int_0^t \frac{dx}{u^2(x)}$$

vérifie la relation :

$$F(t + 2\pi) - F(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{u^2(x)}.$$

4° On suppose que (E) admet une solution u périodique de période 2π et ne s'annulant pas, et soit v une solution de (E) dont le rapport à u n'est pas constant. Prouver que v ne peut pas être périodique.

III

On suppose que l'équation (E) admet la solution particulière u définie par

$$u(t) = \sqrt{2 + \cos t}$$

1° Calculer $\varphi(t)$.

2° Écrire l'équation (E_1) vérifiée par l'inconnue auxiliaire $z = \dfrac{y}{u}$ et donner l'intégrale générale de (E_1).

3° Montrer qu'il existe une intégrale v de (E) telle que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad v(2k\pi) = 2k\pi,$$

et la déterminer.

IV

On pose $\varphi(t) = -(1 + 2\,\mathrm{tg}^2 t)$.

1° Montrer que la fonction u définie par $u(t) = \dfrac{1}{\cos t}$ est solution de (E) puis déterminer l'intégrale générale de (E).

2° On considère le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\cos t} \\ v = \dfrac{t}{\cos t} + \sin t. \end{cases}$$

Montrer que l'équation $v'(t) = 0$ est équivalente à $t = h(t)$,
avec $h(t) = \sin t \cos t - 2\,\mathrm{cotg}\, t$.

Indiquer l'allure de la courbe représentant $h(t)$. En déduire le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

3° Représenter graphiquement l'ensemble des points M lorsque :

$$t \in \left]-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail